Conceptos Matemáticos

Matemática Discreta, Calculo y Algebra aplicadas a finanzas

Indice

Introducción

En este módulo se abordan conceptos matemáticos básicos y su aplicación concreta a las finanzas como base para la posterior profundización en los actuales métodos y modelos que se utilizan en finanzas.

Repasaremos los principales conceptos de:

1. Se interpretaran aspectos de matemática discreta, (aplicada a conjuntos numerables) tales como la inducción y el calculo de series

2. cálculo: variable, función, continuidad, derivabilidad, integrabilidad,…, no con un carácter general ni exhaustivo, sino más bien enfocado a su aplicabilidad directa en finanzas.

3. En algebra lineal conocimiento de matrices y su funcionamiento y su posible uso en finanzas

Durante la clase se aplicaran ejemplos que permitirán vislumbrar dicha aplicabilidad.

Matemática Discreta
Inducción

A través de la inducción podemos demostrar ecuaciones en números naturales, para ello necesitamos:

1. Demostrar algo para el primer caso n=1
2. Demostrar que si f(n-1) se cumple → f(n) se cumple

EJEMPLO

Demostrar que la suma de los n primeros números:

$$(1+2+\ldots+(n-1)+n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

DEMOSTRACION

Para n=2 $1+2=3=\frac{2(2+1)}{2}$

Además si asumimos que para n-1 la serie:

$$(1+2+\ldots+(n-1)) = \frac{(n-1)n}{2}$$

Entonces:

$$(1+\ldots+n-1)+n=\frac{(n-1)n}{2}+n=$$

$$=\frac{(n-1)n+2n}{2}=\frac{n[(n-1)+2]}{2}=\frac{\mathbf{n(n+1)}}{\mathbf{2}}$$

EJERCICIO

Calcular $\sum_{i=1}^{n} S_i$ donde $S_i = S_{i-1} + A$

Matemática Discreta

Inducción

Serie Aritmética:

Calcular $\sum_{i=1}^{n} S_i$ donde $S_i = S_{i-1} + A$

Entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n} (S_1+(i-1)A) = nS_1 + A\sum_{i=1}^{n} (i-1) = nS_1 + A\{\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} 1\}$$

$$\sum_{i=1}^{n} S_i = nS_1 + A(\frac{n(n+1)}{2} - n)$$

Es decir:

$$\sum_{i=1}^{n} S_i = nS_1 + A(\frac{n(n+1)-2n}{2}) = nS_1 + A(\frac{n(n-1)}{2}) = n(S_1 + A\frac{(n-1)}{2}) = n(\frac{2S_1 + A(n-1)}{2}) =$$
$$= \frac{n(S_1+S_1+A(n-1))}{2};$$

Luego $\sum_{i=1}^{n} S_i = \boldsymbol{\frac{n(S_1+S_n)}{2}}$

Matemática Discreta
Inducción

DEMOSTRACION GAUSS (10 años)

$S=1+\ \ 2\ \ +\ldots.+(n-1)+n$

$S=n+(n-1)+\ldots+\ \ 2\ \ \ +1$

$2S=((n+1)+(n+1)+\ldots\ldots.+(n+1)+(n+1))$

Es decir $2S=n(n+1)$

Luego $S = (1+2+\ldots.+(n-1)+n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$

$S= S_1 + (S_1 +A)+\ldots.+ (S_n-A)+ S_n$

$S= S_n + (S_n -A)+\ldots.+ (S_1+A)+ S_1$

$2S=((S_1+S_n)+\ldots.+ (S_n+S_1)$

Es decir $2S=n(S_1+S_n)$

Luego $S = \dfrac{n(S_1+Sn)}{2}$

Matemática Discreta
Inducción

Serie Geométrica:

Calcular $S=\sum_{i=1}^{\infty} A_i$ donde $A_i=A_{i-1}r$ con $r<1$

Entonces $rS=\sum_{i=2}^{\infty} A_i$ y por tanto, $S-rS=A_1$

Luego $S=\frac{A_1}{1-r}$

Ejercicio:

Calcular la cuota de un préstamo de nocional P con amortización francesa a un tipo de interés de r para cada periodo con un plazo n periodos.

$$P=\sum_{i=1}^{n} \frac{c}{(1+r)^i}$$

donde **c** es la cuota, luego

$$\frac{-P}{1+r}=-\sum_{i=2}^{n+1} \frac{c}{(1+r)^i}$$

Entonces $P-\frac{P}{1+r}=\frac{c}{1+r}-\frac{c}{(1+r)^{n+1}}$;

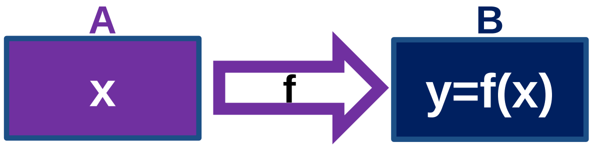
$$\frac{P(1+r)-P}{1+r}=\frac{c(1+r)^n-c}{(1+r)^{n+1}};\ Pr=\frac{c\{(1+r)^n-1\}}{(1+r)^n};$$

despejando c

$$c=\frac{(1+r)^n rP}{(1+r)^n-1}$$

Calculo Función

Sean dos conjuntos **A** y **B**. Designaremos genéricamente como **x** a los elementos de **A** y como **y** a los elementos de **B**.
Una función es una relación entre **A** y **B**:



La relación **f** es una función si se cumple que a cada elemento le corresponde un único elemento. Al conjunto **A** se le suele denominar dominio y al conjunto **B** rango de la función **f**.
Si **B** contiene números reales se dice que es una función *real*.
Si los elementos de **A** y **B** son funciones **f** recibe el nombre de *operador.*

Ejemplos:
Función exponencial:

$$y=e^x \quad \text{con } x\in\Re$$

La función exponencial es multiplicativa, ya que

$$e^x . e^y = e^{x+y}$$

Función logarítmica:

$$y=\ln(x) \quad \text{con } x\in\Re>0$$

La función logarítmica es aditiva, ya que

$$\ln(x)+\ln(y)=\ln(x*y)$$

Calculo Convergencia

Una sucesión de números reales x_n converge a x^* si dado un número $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe un número $N<\infty$ tal que

$|x_n - x^*| < \varepsilon$ para todo $n>N$

Es decir, que a partir del término n-ésimo de la sucesión, con n finito aunque suficientemente grande, siempre será muy próximo a x^* .

A x^* se le denomina límite de la sucesión y se expresa

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$$

Ejemplo:

Sea la sucesión $x_n=1/n$ $(n = 1,2,3,.....)$

Elijamos $\varepsilon = 0{,}000001$. Entonces

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < 0{,}000001 \text{ si } n > 1.000.000$$

En general $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ si $n>1/\varepsilon$.

Luego el límite de la sucesión $\frac{1}{n}$ es 0.

Función Derivada

Sea **y=f(x)** una función continua de la variable **x**

Se define la *derivada* de **f** con respecto a **x** como

$$f_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

La derivada **mide la tasa de cambio** de una función en respuesta **al cambio de la variable** de la cual depende.

Se dice que la función **f es derivable** en **x si** existen las **derivadas** por la **izquierda** y por la **derecha** y ambas coinciden.

EJERCICIOS

Sea $y=f(x)=e^x$ la función, función f_x derivada respecto a **x**:

La derivada de la función Potencial $y=x^n$

a SIX company

Función Derivada

EJEMPLO

Sea $y=f(x)=e^x$ la función, función f_x derivada respecto a x:

$$f_x = \lim_{\Delta x \to o} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to o} \frac{e^x e^{\Delta x} - e^x}{\Delta x}$$

$$= ex \lim_{\Delta x \to o} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

Como $e = \lim_{\Delta x \to o} (1 + \Delta x)^{1/\Delta x}$

$$f_x = e^x \lim_{\Delta x \to o} \frac{(1+\Delta x)^{\Delta x/\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \to o} \frac{(1+\Delta x) - 1}{\Delta x} = e^x$$

EJEMPLO

La derivada de la función Potencial $y=x^n$ es:

$$f_x = \lim_{\Delta x \to o} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to o} \frac{x^n + n\Delta x.\, x^{n-1} + \cdots - x^n}{\Delta x}$$

$$f_x = \lim_{\Delta x \to o} \frac{n\Delta x . x^{n-1} + \cdots}{\Delta x} = nx^{n-1} + \lim_{\Delta x \to o} \frac{n(n-1)/2(\Delta x)^2 . x^{n-2} + \cdots}{\Delta x}$$

$$f_x = nx^{n-1}$$

INSTITUTO BME X

Función Derivada

USO de la DERIVADA para aproximar la FUNCION

Sea y=f(x) una función continua de la variable x

Se define la derivada de f con respecto a x como

$$f_x \cong \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Luego:

$$f(x+\Delta x) \cong f(x)+f_x\,\Delta x$$

Duración Modificada o Duración de Hicks:

La **sensibilidad** del precio de un titulo de renta fija con respecto a las alteraciones de la rentabilidad del mismo, es decir, mide su sensibilidad al cambio de tipo de interés.

$$D_H=\frac{-1}{1+r}\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{tC_t}{(1+r)^t}}{P}=\frac{-1}{1+r}D_M$$

$$D_H=\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{-tC_t}{(1+r)^{t+1}}}{P}$$

Es decir $D_H=\frac{P_r}{P}$

Calcular la Duración de Hicks (**D_H**) para un bono a 2 años con un cupón del 2% y una TIR del 3%.

BME X a SIX company

Función Derivada

Derivada función inversa

Sea **y=f(x)** y la función inversa $x=f^{-1}(x)=g(y)$

$$g_y = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to o} \frac{g(y+\Delta y)-g(y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to o} \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

Luego: $f_x g_y = 1$

Regla de la cadena

Sea **y=f(g(x))** y **z=g(x)**

$$f_x = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta z}\frac{\Delta z}{\Delta x} = f'g'$$

Regla del producto

Sea **f(x)=g(x)h(x)**

$$f_x = g'h + gh'$$

EJEMPLOS

1.Sea la función logaritmo $y=f(x)=\ln(x)$

La función inversa es $x=g(y)=e^y$,

La derivada de la función es $f_x = \frac{1}{g_y} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$

2.Sea la función raíz n-ésima $y=f(x)=\sqrt[n]{x}$

La función inversa es $x=g(y)=y^n$, y su derivada es:

$$f_x = \frac{1}{g_y} = \frac{1}{ny^{n-1}} = \frac{y}{ny^n} = \frac{\sqrt[n]{x}}{nx}$$

3.Sea la función $\mathbf{y=\sqrt[n]{(x^2-3x)}}$

$$f_x = \frac{\sqrt[n]{(x^2-3x)}}{n(x^2-3x)}\,(2x-3)$$

Función Derivada

Derivadas de Orden Superior

La derivada segunda de una función es la derivada de la derivada (primera):

$$f_x^2 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_x(x+\Delta x) - fx(x)}{\Delta x}$$

En general, la derivada n-ésima es la derivada de la derivada (n-1)-ésima:

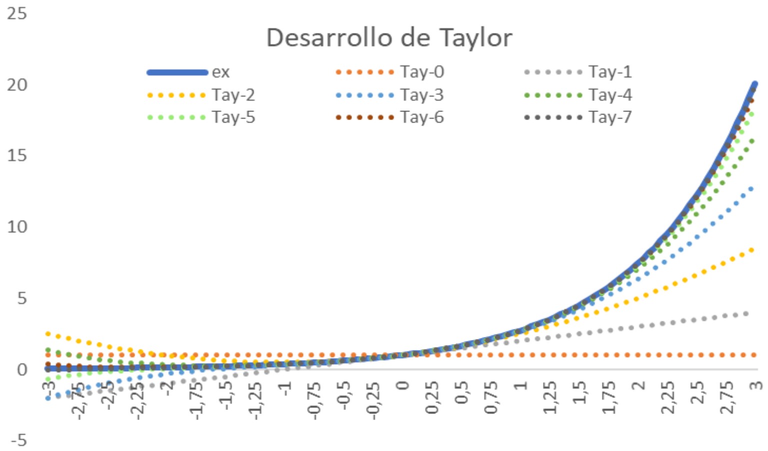
$$f_x^n = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_x^{n-1}(x+\Delta x) - f_x^{n-1}(x)}{\Delta x}$$

Desarrollo deTaylor

Para y=f(x) el valor de la función en (x+Δx), se puede aproximar como:

$$f(x+\Delta x) = f(x) + f_x \cdot \Delta x + \frac{1}{2} f_x^2 \cdot \Delta x^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f_x^n \cdot \Delta x^n + \cdots$$

La función aproximará mejor cuanto mayor sean los términos.



Función Integrabilidad

Utilizaremos el operador $\int$ para calcular sumas con un número infinito de sumandos muy pequeños (en vez de usar el operador Σ, usado habitualmente para sumar un número finito de términos).

Se define la integral de una función dada f(x) entre los límites 0 y T como el siguiente límite:

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} f(x_j)\,\Delta x = \int_0^T f(x)dx \quad \text{siendo } T = N\,\Delta x .$$

$$\text{Luego } \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} f(x_j)\frac{T}{N} = T * \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} f(x_j)/N \quad = T*\text{promedio}(f(x))$$

Dividimos el intervalo de 0 a T en N subintervalos iguales de longitud pequeña **Δx**, es decir, **$\Delta x = x_{j+1} - x_j$**. El valor medio del intervalo viene dado por $\bar{x}_j = \frac{x_{j+1}+x_j}{2}$

Llamando S_N a la suma de N sumandos

$$S_N = \sum_{j=1}^{N} f(\bar{x}_j)\,\Delta x = \sum_{j=1}^{N} f\left(\frac{x_j+x_{j+1}}{2}\right)(x_{j+1} - x_j)$$

el límite de S_N cuando N tiende a infinito y Δx tiende a cero es la integral anteriormente definida:

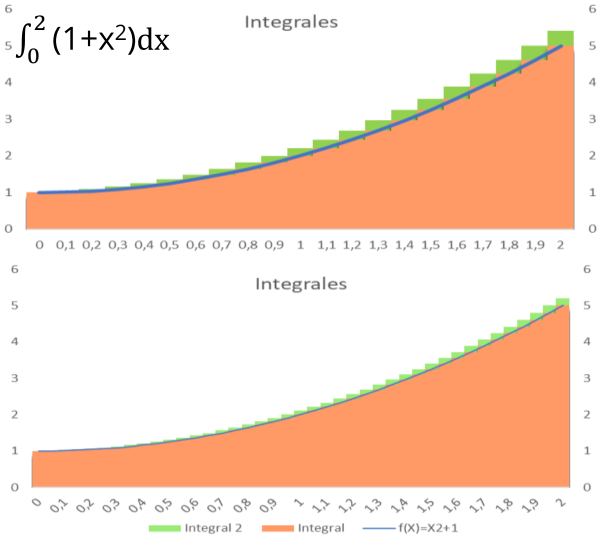
$$\lim_{N\to\infty} S_N = \int_0^T f(x)dx$$

Cuando el límite existe se dice que f(x) es integrable (más precisamente Riemann-integrable, ya que esta no es la única definición de integrabilidad).

Interpretación: La cantidad **$f(\bar{x}_j)\Delta x$** equivale al área de un rectángulo cuya base es **Δx** y cuya altura es **$f(\bar{x}_j)$**, luego la suma **S_N** debe ser muy parecida al área comprendida entre la curva de la función f(x) y el eje horizontal. La integral $\int_0^T f(x)dx$, el límite de **S_N** es exactamente dicha área.

EJEMPLO

Integrar la función $f(x)=1+x^2$ entre 0 y 2



Función Integrabilidad

Regla de la Integración

$$\int_0^T f_x dx = [f(x)]_0^T = f(T)-f(0)$$

Integración por partes

$$\int_0^T f_x g(x) dx = [f(T)g(T) - f(0)g(0)] - \int_0^T g_x f(x) dx$$

Y también

$$\int_0^T (f(x)g(x))_x dx = \int_0^T f(x) g_x dx + \int_0^T f_x g(x) dx$$

Ejemplo Regla de la Integración

Sea la función $f(x)=x^2$, su integral entre 0 y 3 es

$$\int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3} = 2{,}667$$

Ejemplo Integración por partes

Sea la función $f(x)=xe^x$, su integral entre 0 y 1 es

$$\int_0^1 xe^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e-(e-1) = 1$$

Función Integrabilidad

Integrales

aplicación

Calcular el valor de una opción

Calcular perdidas esperadas

Matrices Conceptos

Definición de matriz

Una **matriz** es un conjunto de elementos distribuidos en **filas** y **columnas**. Se suele representar como $A=(a_{ij})_{mxn}$ a una matriz de elementos de **orden** mxn (m filas y n columnas).

Un **vector** es una matriz con una sola fila o una sola columna.

Una **matriz cuadrada** en una matriz de orden n (nxn). Y su **diagonal** son los números a_{ii}.

Suma:

$A=(a_{ij})_{mxn}$ y $B=(b_{ij})_{mxn}$, $A+B=C$ con $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$

Producto:

$A=(a_{ij})_{mxn}$ y $B=(b_{ij})_{nxh}$, $AB=C$ con $c_{ik}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}*b_{jk}$

No conmutativa $AB \neq BA$

A		
1	2	4
0	4	3

B	
1	0
0	2
3	5

C=AB	
13	24
9	23

C=BA		
1	2	4
0	8	6
3	26	27

Matriz Unidad

Es una matriz cuadrada donde $a_{ii}=1$ y $a_{ij}=0$ para $j \neq i$.

Matriz Traspuesta

Si $A=(a_{ij})_{mxn}$ es una matriz, $A'=(a'_{ji})_{nxm}$ es su traspuesta (de orden nxm) si $a'_{ji}=a_{ij}$ para todos i y j.

Si A es matriz cuadrada y A=A' entonces se dice que es matriz simétrica.

Unidad		
1	0	0
0	1	0
0	0	1

A	
1	0
0	2
3	5

A'		
1	0	3
0	2	5

Determinante

Si $A=(a_{ij})_{nxn}$ es una matriz cuadrada, el determinante de A es

$$|A|=\sum_j a_{ij}c_{ij} \text{ con } c_{ij} = (-1)^{i+j}\,|A_{ij}|$$

Donde c_{ij} es cofactor y $|A_{ij}|$ es el menor (determinante de A suprimiendo la fila i-ésima y la columna j-ésima).

Matrices Aplicación

Matriz Inversa

Dada una matriz cuadrada D su matriz inversa D^{-1} donde $D\,D^{-1} = D^{-1}\,D = I$

Calculamos la matriz Cofactor(D) matriz de cofactores.

Calculamos la Traspuesta de $(Cofactor(D)^T)$.

$$D^{-1} = \frac{1}{|D|} Cofactor(D)^T$$

D		
1	2	4
0	10	6
3	26	27

Cofactor(D)		
114	18	-30
50	15	-20
-28	-6	10

$Cofactor(D)^T$		
114	50	-28
18	15	-6
-30	-20	10

D^{-1}		
3,8	1,7	-0,9
0,6	0,5	-0,2
-1	-0,7	0,3

Aplicación Tipo de Interés

1.Dada la siguiente curva de tipos de interés swap calcular los factores de descuento y los implícitos anuales.

Tipos	1	2	3	4	5
IRS Swap	3,0%	3,2%	3,4%	3,7%	4,0%

2.Calcular los implícitos y los factores de descuento para un emisor cuyo rendimiento equivale a Euribor + 50 pb con independencia del plazo

3.Dada la siguiente curva IRS y diferenciales

Tipos	1	2	3	4	5
Swap	3,0%	3,2%	3,4%	3,7%	4,0%
Spread	0,10%	0,15%	0,20%	0,25%	0,30%

a)Calcular los implícitos y los factores de descuento para las rentabilidades anteriores

b)Valorar un bono cuyos cupones son euribor + 45 pb dejando variable el plazo

Matrices Resolución

Generamos la matriz con los pagos A

Fila 1: $(1+r_1, 0, 0,\dots,0)$

Fila 2: $(r_2,1+r_2,0,0,\dots.0)$

Fila n-1: $(r_{n-1},r_{n-1},\dots..,1+r_{n-1},0)$

Fila n: $(r_n,r_n,\dots..,1+r_n,)$

Y el vector factores descuento: F

$$F_1$$
$$,,,$$
$$F_n$$

Y el vector 1*:

$$1$$
$$,,,$$
$$1$$

De forma que A.F=1*

Por lo que: **$F=A^{-1}.1^*$**

Matrices Aplicación

Generación de variables correlacionadas

Para la simulación de variables correlacionadas (pe, default, rendimientos,…) es necesario la generación de normales correlacionadas mediante la matriz de correlación:

$$C=\begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{12} & 1 & \cdots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{1n} & \rho_{2n} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Podemos generar $V=(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ donde v_i son números aleatorios con distribución normal N(0,1).

Debemos llegar a $V'=(v'_1,v'_2,\ldots,v'_n)$ donde v'_i son números aleatorios con distribución N(0,1) y con correlaciones C

Para realizar esa transformación lo conseguimos mediante la formula: $V'_T=L_T*V_T$

Donde L_T es la traspuesta de la matriz de Cholesky de C

Matriz Cholesky

Dada una matriz A simétrica y definida positiva, e.d. |A|>0 puede descomponerse en dos matrices triangulares (inferior y superior) tal que $A=L_T*L$

Para el calculo de la matriz de Cholesky sólo debemos igualar los coeficientes:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & \cdots & l_{n1} \\ 0 & l_{22} & \cdots & l_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}$$

Luego:
$a_{11}=l_{11}^2 \quad \rightarrow l_{11}=a_{11}^{1/2}$
$a_{21}=l_{21}l_{11} \quad \rightarrow l_{21}=a_{21}/l_{11},\ldots l_{n1}=a_{n1}/l_{11}$
$a_{22}=l_{21}^2+l_{22}^2 \quad \rightarrow l_{22}=(a_{22}-l_{21}^2)^{1/2}$
$a_{32}=l_{31}l_{21}+l_{32}l_{22} \quad \rightarrow l_{32}=(a_{32}-l_{31}l_{21})/l_{22}$, *etc.*

Generalizando los resultados anteriores llegamos a las siguientes formulas (todas las ecuaciones tienen solución en la raíz por estar A definida positiva) con todos los l_{ij} son reales

$$l_{ii}=\sqrt{a_{ii}-\sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2} \qquad l_{ji}=\frac{a_{ji}-\sum_{k=1}^{i-1} l_{jk}l_{ik}}{l_{ii}}$$

Plaza de la Lealtad, 1 · 28014 Madrid